

大規模講義での活用： **MATLAB Grader**（自動採点システム）の実践報告

東京大学

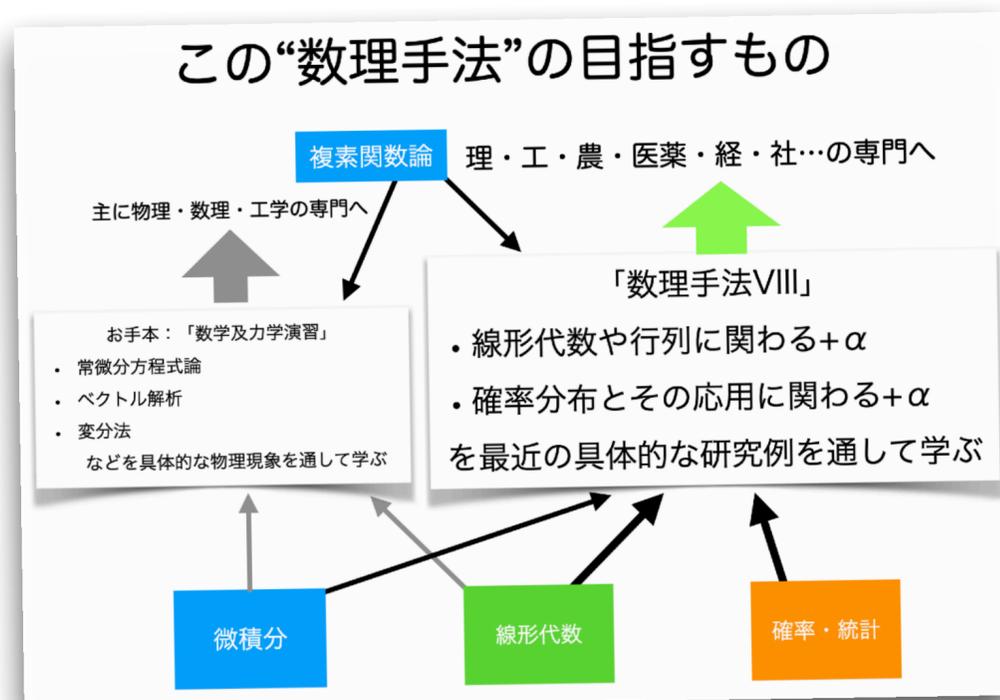
数理・情報教育研究センター 数学基礎教育部門

大学院工学系研究科 システム創成学専攻

島田 尚

活用した講義：数理手法VIII

- ◆ 受講対象学生のバックグラウンドが幅広い：学部2年冬学期の**工学部**進学者がメイン、医、理、農、経なども少数
(数理、物理、電気、機械、航空、材料、建築、生物、化学、...)
- ◆ 受講人数も多い：履修者：200~300人ほど、期末試験まで：200人弱（2020, 2021年度）
- ◆ 数理メインなので手計算も大事だが、手計算だけでは「理解に肉付けが足りない」内容が多い：



- A. グーグル検索、国の競争力などの「重要性評価手法」やサンプリング関連の数理
- ペロン・フロベニウスの定理、power method、マルコフ連鎖
- B. 統計解析とデータの縮約（データサイエンス、機械学習）
- 特異値分解、最小2乗問題、主成分分析、スパースモデリング
- C. 生物・社会・経済系などの系（遺伝子発言量、株価や為替変動、生物や人の移動や通信、都市成長 etc）の解析のための基礎
- 大数の法則、中心極限定理
 - ベキ分布を生むメカニズム、自己組織的臨界性
- D. 複雑ネットワーク
- ネットワーク構造の特徴づけ
 - ネットワークの頑健性、脆弱性、伝搬の数理

課題と取り組み

- ◆ 受講対象学生のバックグラウンドが幅広い
- ◆ 受講人数も多い
- ◆ 数理メインなので手計算も大事だが、手計算だけでは「理解に肉付けが足りない」内容が多い：



- ◆ 理解定着のためのレポート課題について、実際に他変数データを扱ったり数値的に実験するものを含みたい
- ◆ しかしながらプログラム言語と環境の統一・教育のための余裕は無い



従来型の「紙のレポート」 (50%)

+

MATLAB Grader による体験型レポート (50%)

+

期末テスト

活用例 1：
特異値分解とその応用

講義や紙レポートで先にしっかりと数理の内容を扱う：

特異値分解

対角行列のような行列 Σ と 直交行列 U, V により、
(非正方、ランク落ち等含む) 行列を $A = U\Sigma V^*$ の形に分解 (cf. 対角化)：

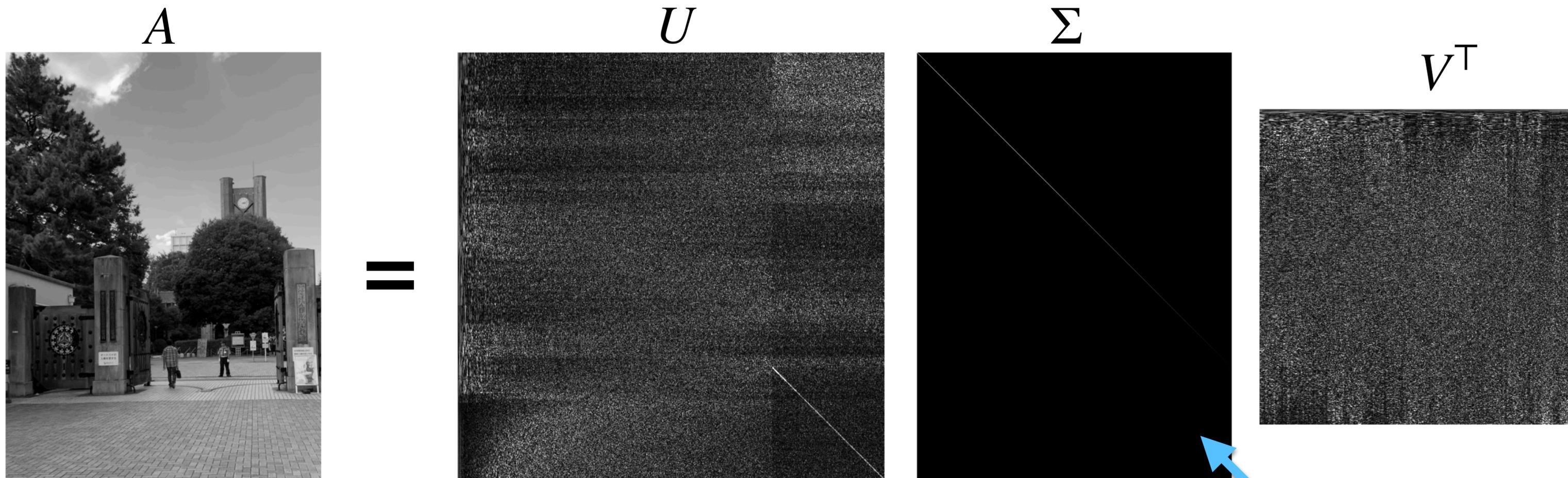
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_i & \cdots & \vec{u}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} - & \vec{v}_1^* & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{v}_j^* & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{v}_m^* & - \end{pmatrix}}_V$$

ポイント：

- $A^T A$ は対称行列なのでこの行列の (直交) 固有ベクトルを用いる
- V は $A^T A$ の正規化した固有列ベクトルを並べたもの
- U は AV の各列を正規化したもの

画像ピクセル値の特異値分解

「MATLAB quick start」
(藤原先生) より

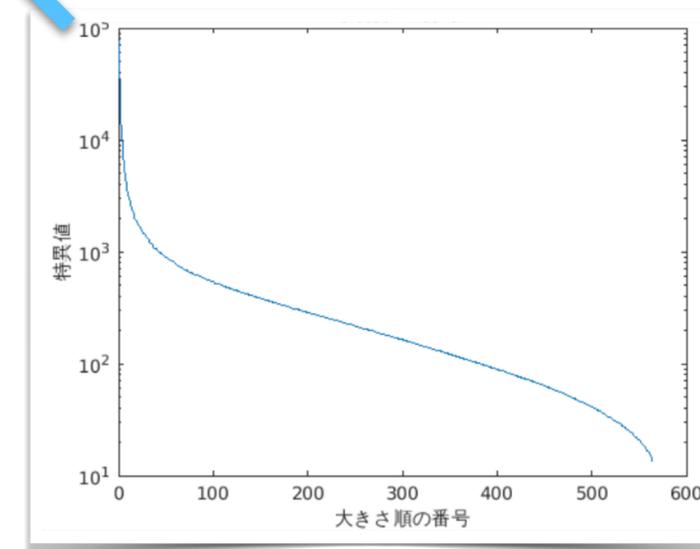


(要素の絶対値で表示)

フルランクの特異値をとらなくても、結構良い再構成ができるのでは？

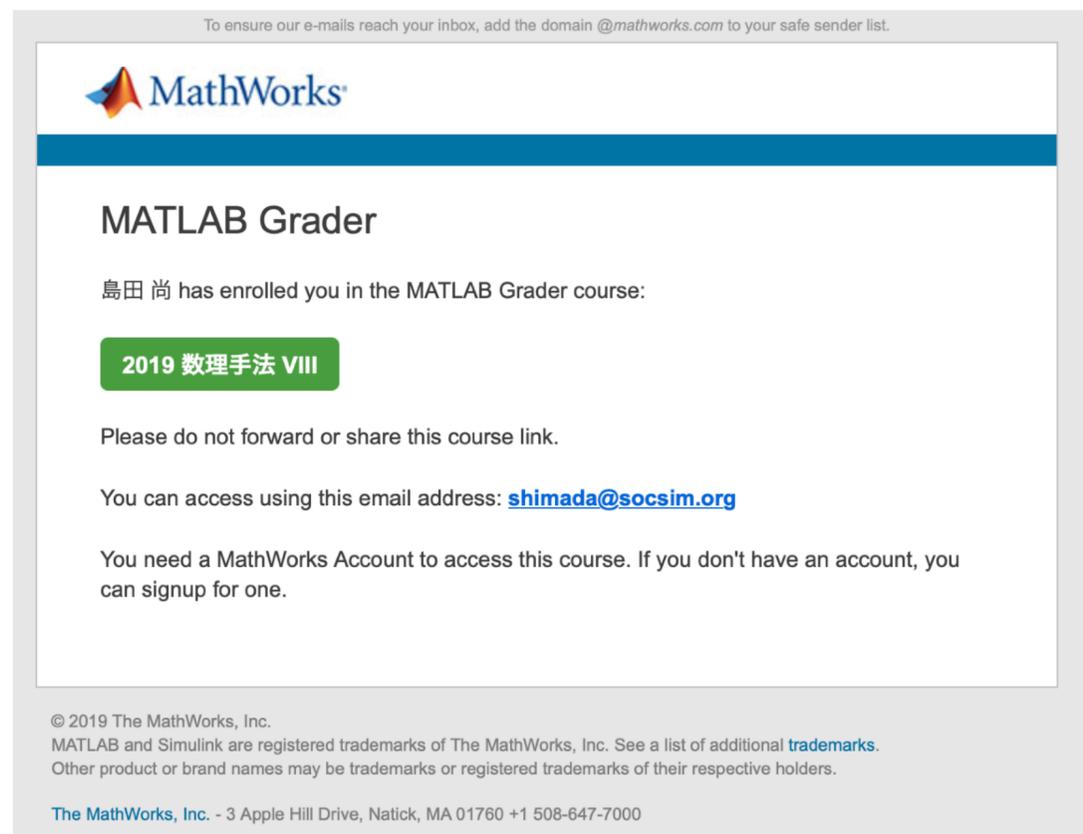


画像の圧縮 (特異値分解の低ランク近似)



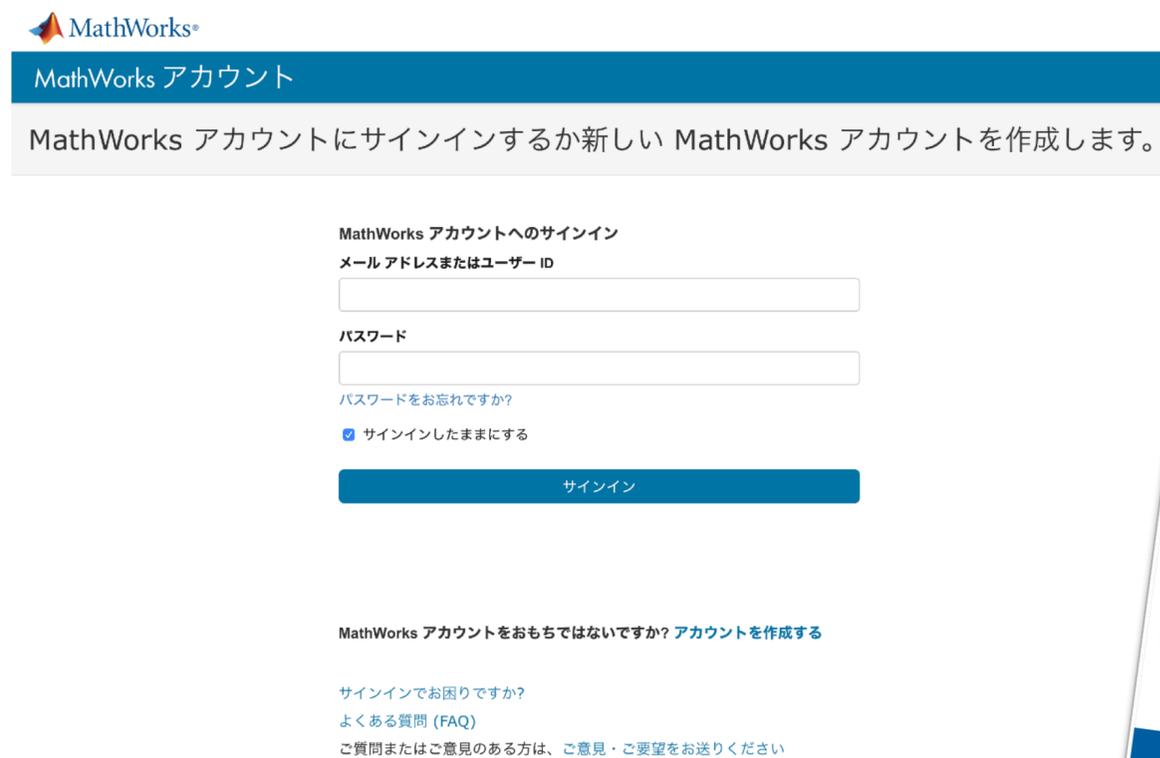
MATLAB Grader 利用時の案内

後でこのようなメールが届きます。
スパムフィルタにかかっているかもしれないので注意。



↑
Zoom 講義に登録された大学アカウントを一括で Grader コースに招待
(講義オンライン化以前は ITC-LMS 登録の連絡先に案内)

MathWorks アカウントがない方には、
まずアカウントを作成してもらう必要があります
UTokyo Account を使用して作成すると、MATLAB 自体が使えます



↑
学生は各自 MathWorks アカウントを作る
(か、既存アカウントを利用)



MATLAB Grader レポート

↓ 受講生側の画面

講師側での課題の準備 ↓

特異値分解の低ランク近似による画像の圧縮をしてみよう

!!! 注意: Safari と Internet Explorer ではうまく入力できない問題があるようです。その場合は Chrome もしくは Edge を使ってください。 !!!

白黒画像を行列として扱い、特異値分解して再構成するスクリプトが以下に示してあります。これを参考に、特異値分解の低ランク近似により再構成した「圧縮画像」を生成し、表示して元画像

1. まず Run Script をクリックし、このスクリプトの出力結果（フルランクでの再構成）を確認してください
2. 次に、25行目以降にスクリプトを追加することにより「特異値の大きい方から10個まで」、「30個まで」、「100個まで」と低ランク近似とした場合について行列を再構成し画像として rec_image10, rec_image30, rec_image100 と命名するようにしてください。
3. Run Pretest で、正しく再構成できているかを部分的にチェックできます。Run Pretest での確認後 Submit するようにしてください。
4. 今回の課題から考察したことがあれば最下部のコメント欄に書いてください。

- MATLAB では、svd(行列) の代わりに svds(行列, k) と書くと「特異値の大きい方から k 個まで」とった低ランク近似の特異値分解が得られます。
- 記述したスクリプトを実行するには「スクリプトの実行」をクリックします。これは何回でもできます。
- 「プレテストを実行」すると、途中経過が合っているか確認できます。これも何回でもできます。
- **提出は3回まで可能**ですが提出回数も評価に入りますので注意してください（提出時に間違った項目が分かるので公平のため）。
- 他、MATLAB でのプログラムの基本的な書き方について分からないことがあった場合は、まず以下の **クイックスタート** を参照してください。
- 今年度より、東京大学の学生は負担無しで MATLAB を利用することができます。自分の PC へのインストールの手順などについては **大学のHP** を参照してください。

!!! 注意: Safari と Internet Explorer ではうまく入力できない問題があるようです。その場合は Chrome もしくは Edge を使ってください。 !!!

スクリプト

```
1 %% 元画像の読み込みと確認
2 original_image = imread('komaba_mono.jpg'); % 読み込み
3 imshow(original_image); % 画像で確認
4 title('元画像');
5 original_matrix = double(original_image); % 特異値分解のために行列の型を倍精度実数型に変換
6 whos original_image; % サイズと型の確認
7
8 %% 特異値分解
9 [U, S, V] = svd(original_matrix); % 特異値分解
10 whos U; % 分解に用いた行列のサイズの確認
11 whos S;
12 whos V;
13
14 %% 元の行列の再構成
15 rec_matrix = U*S*V'; % (注)MATLAB では A' で行列のエルミート共役を表す
16 rec_image = uint8(rec_matrix); % 画像として確認するため、再構成した行列を整数型に戻す
17 figure; % 前の画像に重ね書きしないように新しい描画領域を用意
18 imshow(rec_image); % 再構成画像の表示
19 title('フルランク再構成画像'); % 画像で確認
20
21 %% 以下に低ランク近似による画像の再構成をするスクリプトを記述してください %%
22 % 低ランク近似して再構成した行列(整数型)は以下のように名付けること
23 % rec_image10, rec_image30, rec_image100
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25
26
27
28 %% 今回の課題で気づいたこと、考察などがあれば以下にコメント文で書いてください(MATLAB では
29 % (例えばこのように書くとコメントアウトされます))
30
```

学生側（**全てブラウザ上**）：

1. スクリプトを書く
2. 途中まで合っているか分かる「プレテスト」で試行錯誤
3. コメント文として文章問題に答えたり、考察を書く
4. 提出
5. （間違いと出た場合は回数を限って再提出もできる）

問題のタイプ* ?

● スクリプト ○ 関数

受講生用テンプレートをブラウザ上で記述

コード

模範解答 ? 受講者用テンプレート ?

```
1 %% 元画像の読み込みと確認
2 original_image = imread('komaba_mono.jpg'); % 読み込み
3 imshow(original_image); % 画像で確認
4 title('元画像');
5 original_matrix = double(original_image); % 特異値分解のために行列の型を倍精度実数型に変換
6 whos original_image; % サイズと型の確認
7
8 %% 特異値分解
9 [U, S, V] = svd(original_matrix); % 特異値分解
10 whos U; % 分解に用いた行列のサイズの確認
11 whos S;
12 whos V;
13
14 %% 元の行列の再構成
15 rec_matrix = U*S*V'; % (注)MATLAB では A' で行列のエルミート共役を表す
16 rec_image = uint8(rec_matrix); % 画像として確認するため、再構成した行列を整数型に戻す
17 figure; % 前の画像に重ね書きしないように新しい描画領域を用意
18 imshow(rec_image); % 再構成画像の表示
19 title('フルランク再構成画像'); % 画像で確認
20
21 %% 以下に低ランク近似による画像の再構成をするスクリプトを記述してください %%
22 % 低ランク近似して再構成した行列(整数型)は以下のように名付けること
23 % rec_image10, rec_image30, rec_image100
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25
26
27
28 %% 今回の課題で気づいたこと、考察などがあれば以下にコメント文で書いてください(MATLAB では
29 % (例えばこのように書くとコメントアウトされます))
30
```

「MATLAB quick start」
(藤原先生) より

評価* ?

評価方法: 正解/不正解 ?

最初のエラーのみフィードバックを表示 ?

> テスト 1 低ランク近似 k=30 (プレテスト)
rec_image30 = 模範解答?

> テスト 2 低ランク近似 k=10
rec_image10 = 模範解答?

> テスト 3 低ランク近似 k=100
rec_image100 = 模範解答?

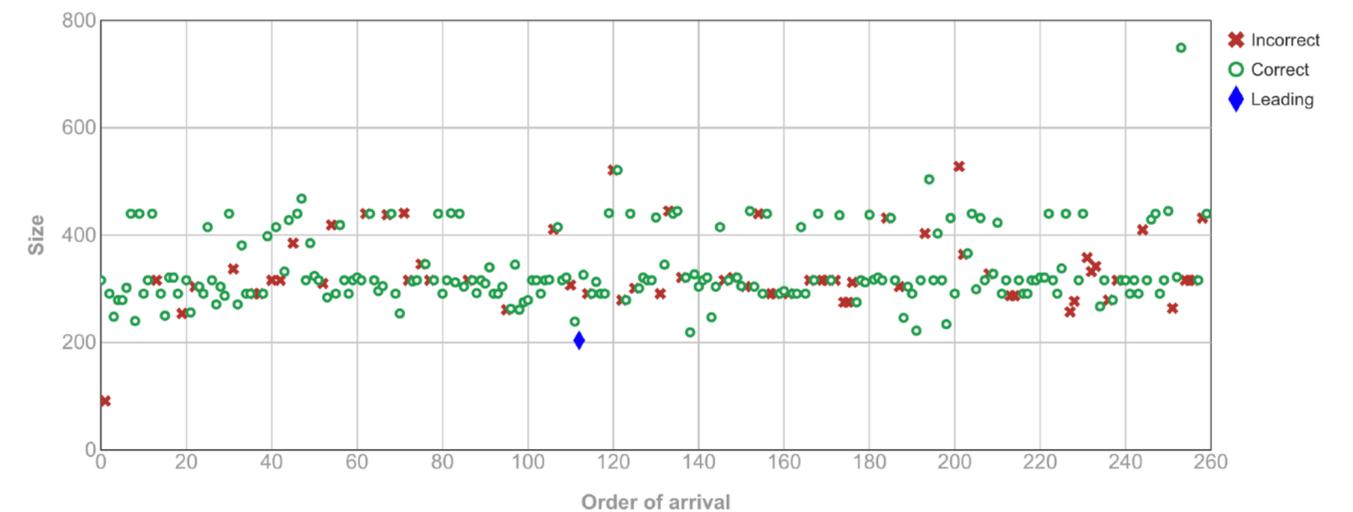
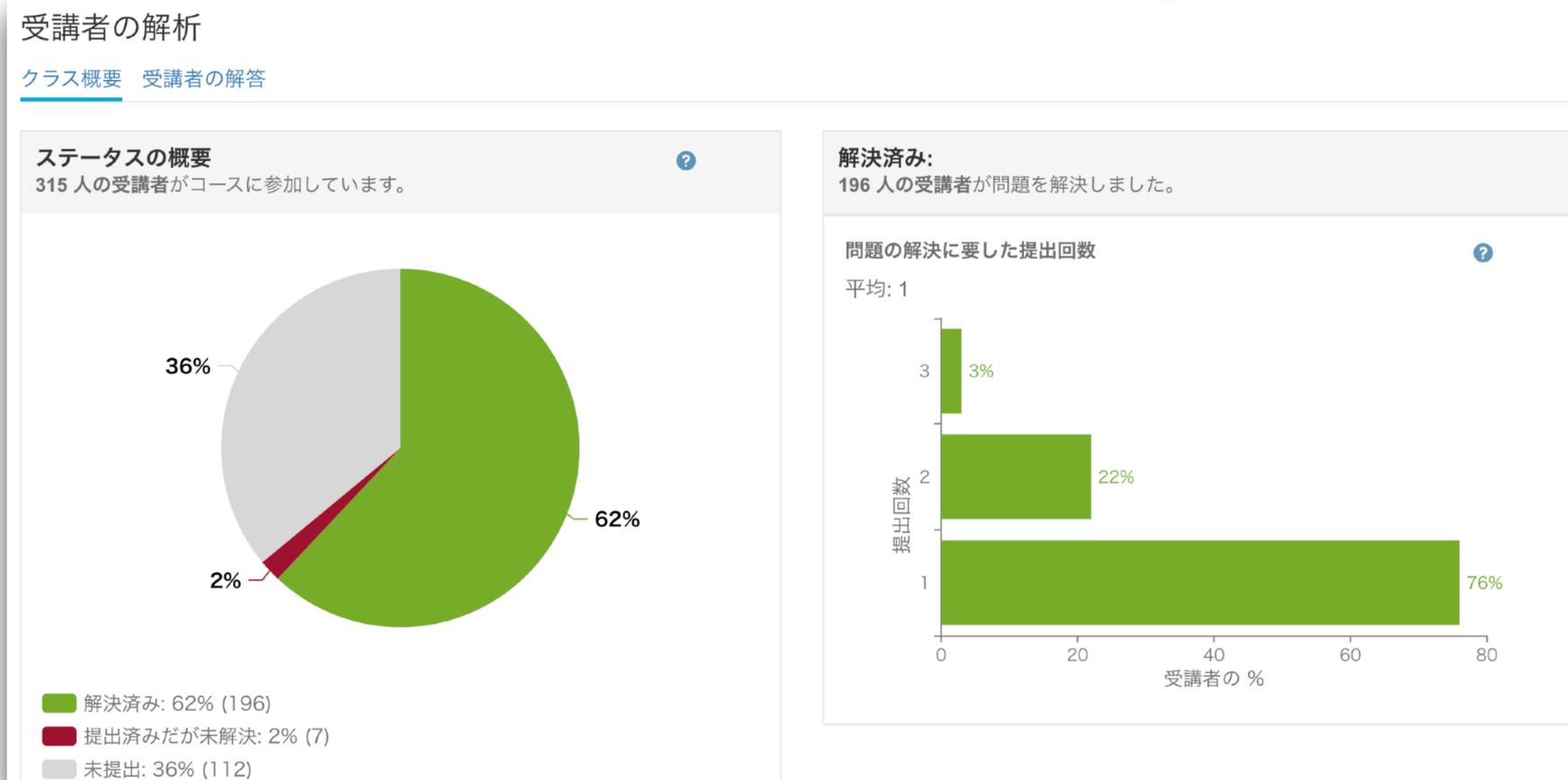
+ 評価を追加

受講者の環境でのプレビュー 模範解答の検証

模範解答のスクリプトも記述
これと対照しての評価方法を設定 →

MATLAB Grader: 解答の自動採点と集計

提出状況を締め切り前から
live モニターできる



MATLAB Grader 課題：特異値分解の低ランク近似による画像の圧縮

100次元



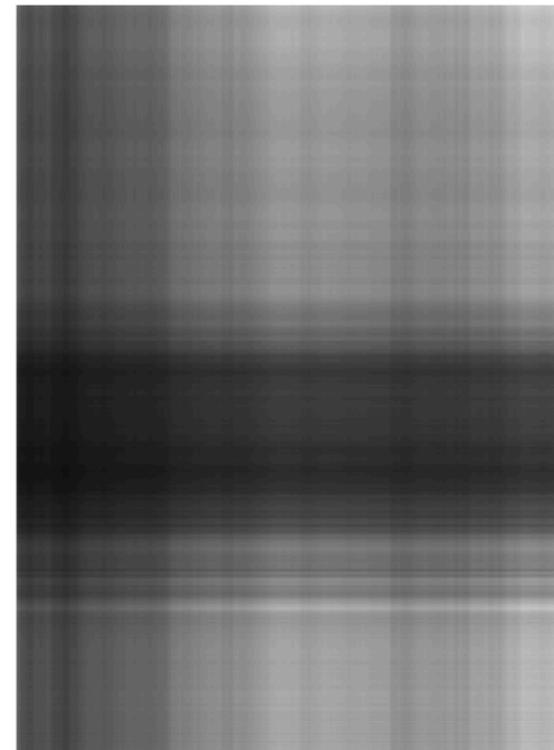
30次元



10次元



(1次元)

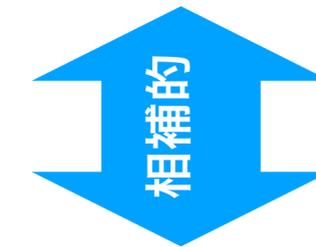


\vec{u}_1

\vec{v}_1^T

=

二項積 (テンソル積、dyadic)



$$\left(A = U\Sigma V^T = \sum_i \sigma_i \left(\vec{u}_i \vec{v}_i^T \right) \right)$$

講義にて：

低ランク近似は、行列要素の差の二乗和

$$\|A - \tilde{A}\|_2^2 = \sum_{i,j} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij})^2 \text{ を最小にする } \tilde{\Sigma} \text{ に対応}$$

活用例2：大数の法則

(再) 講義や紙レポートで先にしっかりと数理の内容を扱う：

大数の法則と中心極限定理

サンプル数 $n \rightarrow \infty$ につれ、

サンプル平均は期待値に収束：
$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0$$

サンプル平均からのずれの分布は
正規分布に収束：

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_i \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \sim N(0,1) \left(= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$



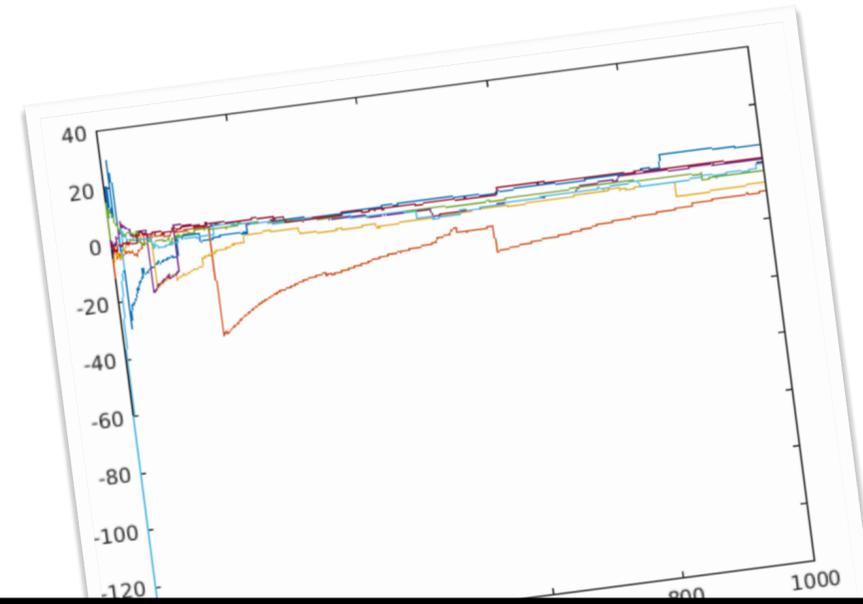
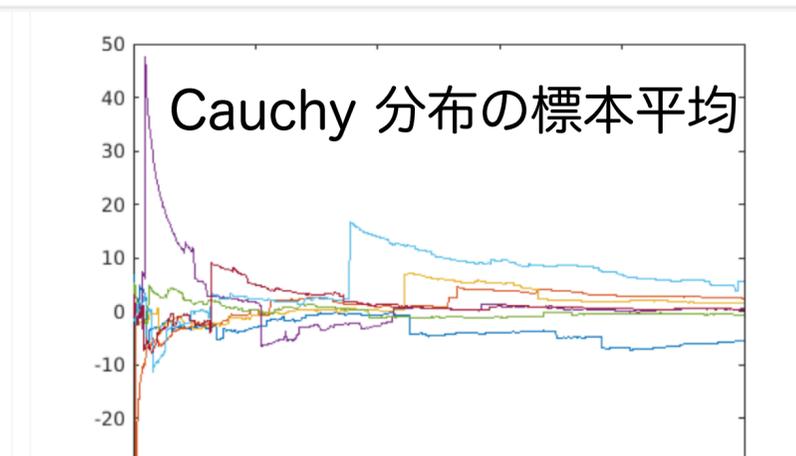
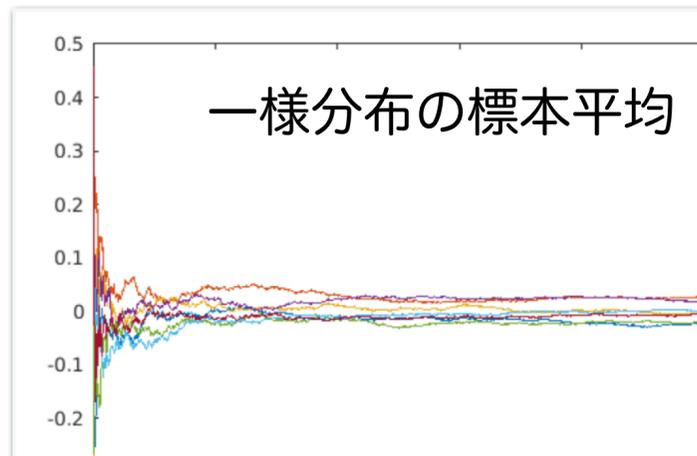
正規分布

$$N(\mu, \sigma^2) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

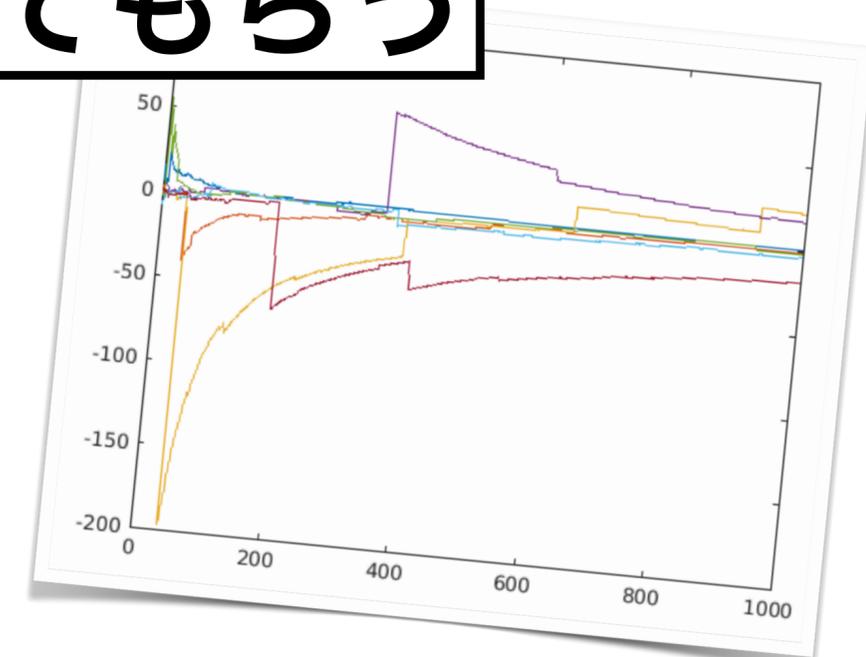
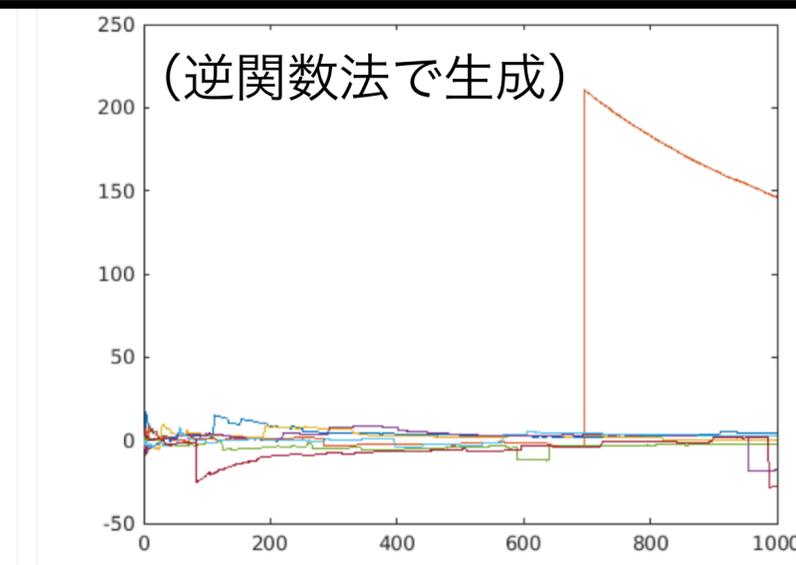
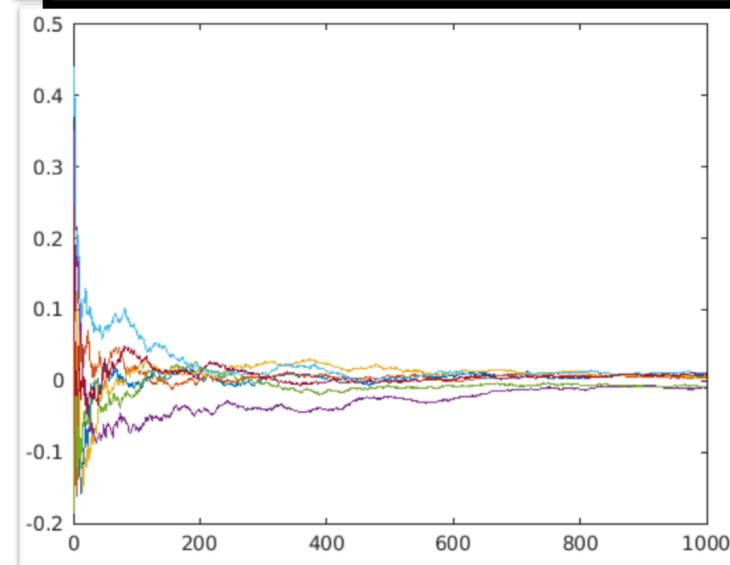
講義ではより一般の分布の場合の安定分布についても扱う（特性関数）

＋この数理と共に伝えたいメインメッセージがある

- 分散が有限で無いような分布は、世の中の現象を広く見ればむしろ普遍的
（例）地震の大きさ、降水量、株価の変動、企業の売上、人や動物の移動、交流の頻度、etc. etc.
- **平均や相関を計算する前に、分布形状を良く見よう！**



MATLAB Grader 課題で体験して考えてもらおう



2019-2021 の活用事例からの感触

(良い点)

- ＊ MATLAB Grader の提出や、紙のレポートとの併用による学生側の混乱はほぼ無かった (プログラミング説明無し)
- ＊ クラシカルなレポートと組み合わせたことにより、学生の理解度が上がった (期末テスト採点からの感触)
- ＊ 事前学習の題材としても使える (原理は良く分からないがどうなるかは体験済み → 対応する数理の説明)
- ＊ コメント文として、「記述型解答」を求めることもできる

(注意が必要な点)

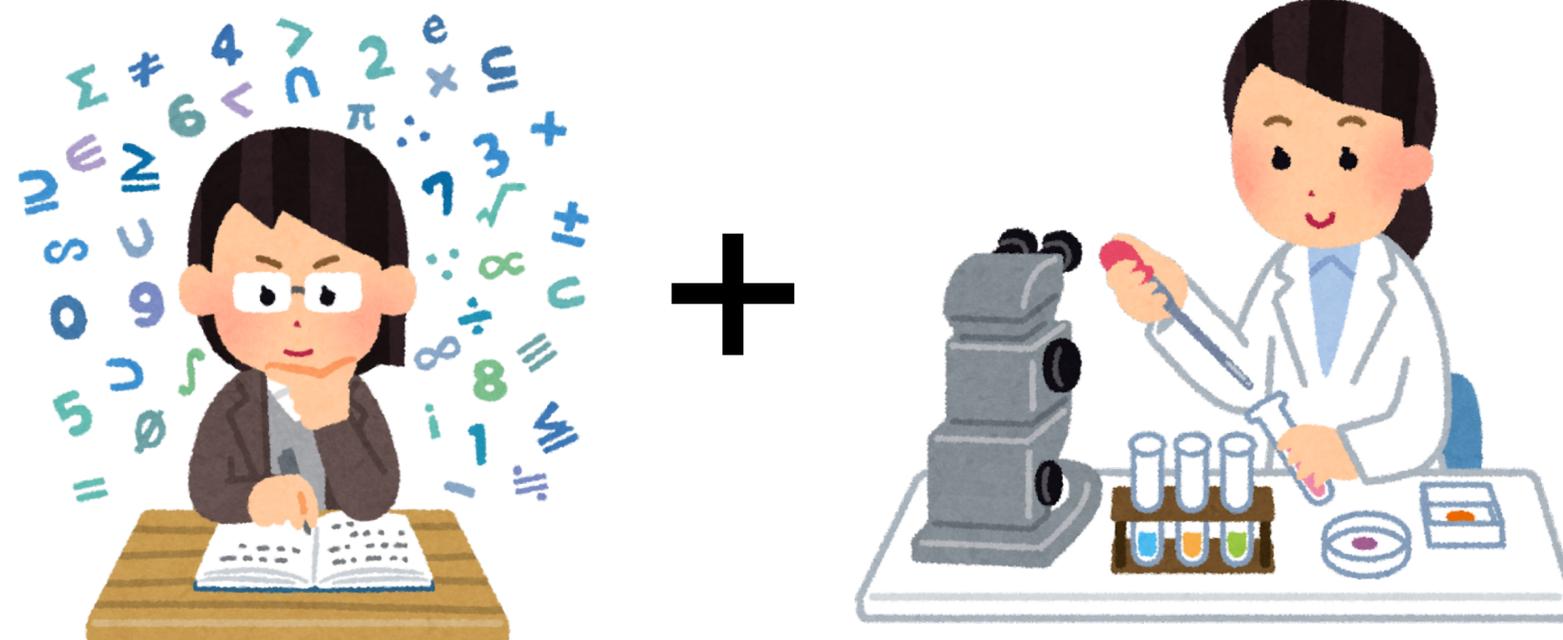
- ＊ MATLAB の文法などを教える時間はほとんどない (既存の座学講義に組み入れる場合) ので、プログラミングの練習というより、体験してもらうというのに近い
- ＊ アカウントの取得から問題回答のシミュレーションまで、学生 TA によるテストが重要
- ＊ MathWorks アカウント、メールアドレスと学生との名寄せが大変な場合があった
→ 講義オンライン化に伴い解消。来学期からは ITC-LMS との連携もできる (はず) 。

MATLAB
Academic Support
の支援に
深く感謝します

(悪い点) : 特に無し。引き続き活用してゆきたい。

類似した 狙い/事情 の講義には特にお勧めです

- ◆ 受講対象学生のバックグラウンドが幅広い
- ◆ 受講人数も多い
- ◆ 数理メインなので手計算も大事だが、手計算だけでは「理解に肉付けが足りない」内容が多い：



(数理手法VIII の学生側アンケート)

設問	本講義	(学科平均)
5: 良く準備・計画されていたか	3.98	3.57
(6: 授業進行の速さ)	-	-
7: 熱意	4.05	3.55
8: 講義技術	3.72	3.39
9: 分かりやすかったか	3.63	3.40
10: 学習意欲は高まったか	3.98	3.48
11: 知識や能力を得られたか	3.93	3.74
12: 将来役に立つと思うか	4.12	3.88