第Ⅳ部

数学基礎 - 中級編

第7章　最適化

計算が進むと，内容もプログラムも複雑になります．この章あたりから，前章で説明したスクリプトファイルを利用した方が便利でしょう．

7.1　ラグランジュ未定乗数法

7.1.1　ラグランジュ未定乗数法の定式化

束縛条件 $g(x, y) = 0$ のもとで、$f(x, y)$ が最大値となる点 (a, b) を求める問題を考えてみましょう．そのためには，新たな変数 λ（**ラグランジュ乗数**と呼びます）を導入して，

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

を考えます．点 (a, b) で $\partial g/\partial x \neq 0$,　$\partial g/\partial y \neq 0$ ならば，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \tag{7.1}$$

により $\lambda = \alpha$ および最大値を与える点 (a, b) が決まります．

7.1.2　典型的問題と解法

【問題】

$$f(x, y) = (x + y)^2 \tag{7.2a}$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \tag{7.2b}$$

として，束縛条件 $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ の最適解を求めよ．

【解】

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{7.3}$$

と置いて，ラグランジュ未定乗数法の条件から

$$(1-\lambda)x + y = 0 \tag{7.4a}$$
$$x + (1-\lambda)y = 0 \tag{7.4b}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{7.4c}$$

が得られます．これを解いて，$\lambda = 2$ 又は 0 を得ます．この λ を用いれば以下のような結果が得られます．

$$\lambda = 2 \text{ のとき} \quad x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f = 2 \tag{7.5a}$$
$$\lambda = 0 \text{ のとき} \quad x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f = 0 \tag{7.5b}$$

7.1.3　MATLAB の利用

これを MATLAB で解いてみましょう．(図 7.1)

```
syms x y lambda  f(x,y)  g(x,y)  real
% maxmize
f(x,y) = (x+y)^2;
% subject to
g(x,y) = x^2 + y ^2 - 1;
L(x,y,lambda) = f - lambda*g
eqn1 = diff(L,x) == 0;
eqn2 = diff(L,y) == 0;
eqn3 = diff(L,lambda) == 0;
ss = solve([eqn1,eqn2,eqn3],[x,y,lambda]);
ss.x
ss.y
ss.lambda
f(ss.x,ss.y)
T =
table(double(ss.x),double(ss.y),double(ss.la
mbda),double(f(ss.x,ss.y)));
T.Properties.VariableNames =
{'x','y','lambda','f'}
```

```
>> LagrangeMultiplier
L(x, y, lambda) =
(x + y)^2 - lambda*(x^2 + y^2 - 1)
ans =
 2^(1/2)/2
-2^(1/2)/2
-2^(1/2)/2
 2^(1/2)/2
ans =
-2^(1/2)/2
 2^(1/2)/2
-2^(1/2)/2
 2^(1/2)/2
ans =
0
 0
 2
 2
ans =
 0
 0
 2
 2
```

```
T =

 4×4 table
    x          y        lambda   f
 ________   ________   ______   ___
  0.70711   -0.70711     0       0
 -0.70711    0.70711     0       0
 -0.70711   -0.70711     2       2
  0.70711    0.70711     2       2
```

図 7.1: Lagrange 未定乗数法．(左) プログラムファイル，(中）(右）出力結果．

- %に続く行はコメント行です．

- ss=$\cdots$ では，solve コマンドを用いて，数式　eqn1〜eqn3 を変数 x , y, lambda について解き，その解を縦ベクトル ss.x, ss.y, ss.lambda に格納．ここで作られる ss は構造体と呼ばれる．ここでは行列形式になっている．
- プログラムの中でデータ ss.x ss.y ss.lambda がどう入っているか，f に何が入っているか確認している．その答えが中央の 4 つの ans=$\cdots$ に対応する．
- double(ss.x) 等でシンボリック変数を倍精度数値（double）に変換し，T=table($\cdots$) で table T を定義する．セミコロンがあるから結果は出力されない．
- T.Properties.VariableNames $= \{'x', 'y', '\mathrm{lambda}', 'f'\}$ では，table プロパティ VariableNames （変数名）を変更して，table 内の各変数の変数名を指定する．その出力が右．

7.2　線形計画法

一般的な関数（目的関数）の大域的な最小値または最大値（とパラメータ空間の場所）を探す問題は，現在は数学としても**（非）線形計画問題**として大きな分野を形成しています.

7.2.1　線形計画法とは

線形計画問題とは，目的関数と制約条件がすべて，値を定めるべき変数について線形の最適化問題のことをいいます．変数が 2 つ $x_1(\geq 0), x_2(\geq 0)$ の場合に一般的に書けば，不等式条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \tag{7.6a}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \tag{7.6b}$$

の制約（2 次元空間内で (x_1, x_2) の領域を決める）の下で

$$c_1x_1 + c_2x_2 \tag{7.7}$$

の最大小値およびそのときの x_1, x_2 を求める問題です.

目的関数が線形なので，局所的な解は大域的な意味でも最適解になります．さらに目的関数も線形ですから，最適解は (x_1, x_2) 平面内の凸多角体の境界上に存在するはずです．

7.2.2　線形計画法の問題と考え方

[問題]：
$4x + 2y \leq 30,\ x + 3y \leq 14$ の制約条件の下で
目的関数 $f(x, y) = -5x - 4y$ を最小化せよ（図 7.2).
[考え方]：
領域 $4x+2y \leq 30,\ x+3y \leq 14$ のをグラフ上に描き，$f(x, y) = -5x-4y =$ 一定 の直線をいろいろ描いてみると，すぐに解答が見つかるでしょう．図7.2に解答を示してみましょう．

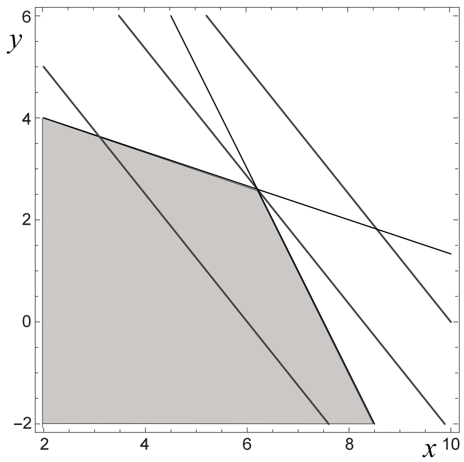

図 7.2: 線形計画問題の例．制約条件 $4x + 2y \leq 30,\ x + 3y \leq 14$ の下で，目的関数 $f(x, y) = -5x - 4y$ を最小化する．グレー部分が制約条件で指定された領域．並行した直線は $f(x, y) = -30, -207/5, -50$ の等高線．$x = 31/5,\ y = 13/5$ で最小値 $a = -207/5$ をとる．図から見て取れるように，最適値をとる場所は， 領域の端， 2 つの直線の交点となる．

7.2.3　MATLAB の利用

MATLAB には線形計画法のルーチン linprog(f, A, b) が用意されています．ここで A は行列，f，b はベクトルです（図 7.3）．

- $x = \mathrm{linprog}(f, A, b)$ は $\{A\boldsymbol{x}\}_i \leq b_i \quad (i = 1, 2)$ の条件の下で，$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x}$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ 求める．
- この問題では

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -5 & -4 \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

  と選べばよい．
- Sol=f*x では, 上の問題の解である $\boldsymbol{x}$ を用いてこの値を計算する．

```
%Linear Programing Problem
%Ax ¥le b  ( Constraint Conditions)
%Oprimization of f*x
A=[4 2;1 3]; b=[30;14];f=[-5 -4];
x=linprog(f,A,b)
% x is the point of the solution
Sol=f*x % Answer
```

```
>> LinearProgramProb1
Optimal solution found.
x =
   6.2000
   2.6000
Sol =
  -41.4000
```

図 7.3: 線形計画問題の例.

7.3 非線形計画法

制約条件，目的関数（のすべて，あるいは一部）が一般に非線形である場合，たとえば次のようなものを非線形計画問題といいます．

7.3.1 非線形計画法の問題と解答

[問題]： $x \geq 0$, y ≥ 0 において，
制約条件 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ の下で，
目的関数 $f(x, y) = x^2 + y$ を最大化せよ．

この問題を理解するために，領域 $x \geq 0$, y ≥ 0 で制約条件 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$（円環領域）を描き，その中で $f(x, y) = x^2 + y = c$（放物線）を，定数 c を変えながら描いてみましょう（図 7.4).

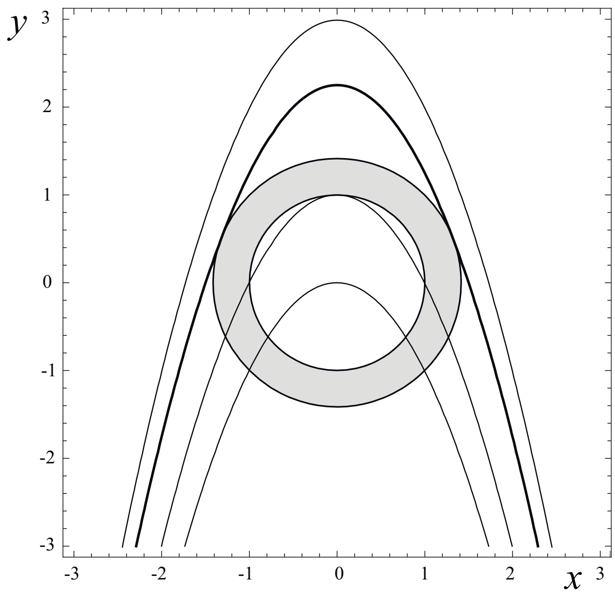

図 7.4: 非線形計画問題の例．グレー部分が制約条件で指定された領域で，目的関数の等高線 $f(x, y) = a$ は放物線である（$a = 3,\ 9/4,\ 1,\ 0$）．答は図から読み取れるように $x = \sqrt{7}/2,\ \ y = 1/2$（太い放物線 $(a = 9/4)$ と外円との接点）のときに $f(\sqrt{7}/2, 1/2) = 9/4$ である．

7.3.2　MATLAB の利用

https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/nonlinear-equality-and-inequality-constraints.html　を見てください．

手順 1. （右上） ファイル objfun.m を定義します．目的関数の定義です．問題では最大化ですから,「最小化」に対応するため符号を反対にして定義しています．x と y が縦行列 x の第 1，第 2 成分になります．

手順 2. （右上の下半分）ファイル confun.m を定義します．非線形制約条件の定義です．$x(1)\hat{\ }2 + x(2)\hat{\ }2 - 2$，$-x(1)\hat{\ }2 - x(2)\hat{\ }2 + 1$，$-x(1)$，$-x(2)$ のどれもが負という条件です．

手順 3. （左）制約付き最適化ルーチンを呼び出すメイン・パートです．$x0$ は x(1), x(2) の試行初期値です．

```
%Main Program   NonLinearProgramProb2
x0 = [0.1,0.1];     % Make a starting guess at the solution
options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','sqp');
%options = optimoptions(SolverName,Name,Value) は、
%名前付きパラメーターSolverNameを指定値Valueにより変更し、optionsを返す.
[x,fval] = ...
fmincon(@objfun,x0,[],[],[],[],[],[],@confun,options);
%行末の 3 つ以上のピリオドは、現在のコマンドを次の行
% = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
%に続けるために使用.
x
fval
Sol=fval;
```

```
%Program    objfun.m
% Step 1
function f = objfun(x)
f = -x(1)^2 -x(2) ;

%Program
%Step 2
function [c, ceq] = confun(x)
% Nonlinear inequality constraints
c = [x(1)^2+x(2)^2-2 ; -x(1)^2-x(2)^2+1 ; -x(1); -x(2)];
ceq = [];
```

```
>> NonLinearProgramProb2
<stopping criteria details>
x =
   1.3229    0.5000
fval =
   -2.2500
```

図 7.5: 非線形計画問題の例. main プログラム（左），objfun.m と confun.m の定義（右上），結果（右下）.

出力 （右下）$x = 1.3229\ (=\sqrt{7}/2)$, $y = 0.5000\ (=1/2)$ のとき，最低値 $-2.2500\ (=-9/4)$ を与えます.

第8章　統計

ここでは，MATLAB の Statistics and Machine Learning Toolbox を使用して，統計データの扱いを説明します.

8.1　データの入力と表示

8.1.1　データの形

まず最初に我々が思いつくのは，データが Excel 上に用意されている場合でしょう.
エクセルデータ Jap-Math-Sci.xslx に図 8.1のようなデータが用意されているとします．使用するのはこの内の，第 3 列 number（個体番号），第 4 列 sex（男女の別），第 5 列 JapA（国語得点），第 7 列 MathA（数学得点）です．[1]
ここでは説明しませんが，カンマ付きデータ（csv ファイル）の場合には readmatrix(filename) を用います.

		number	sex	JapA	JapB	MathA	MathB	SciA	SciB	SciC
2015	3	1	2	27	7	33	9	16	6	10
2015	1	2	2	26	4	20	5	7	3	4
2015	1	3	2	27	7	29	12	19	6	13
2015	2	4	1	22	7	14	2	17	5	12
2015	1	5	2	27	8	31	8	16	6	10

図 8.1: ５０行の入力データの最初の数行.

[1] このデータは文科省が公表した全国学力・学習状況調査（全国学力テスト）のパブリックユースデータ（擬似データ）の一部にさらに手を加えた架空データである.

8.1.2 分布図および散布図

データの分布図あるいは散布図を上手に使えば，データの中身の概要を把握することができます.

8.1.2.1 分布図

histogram コマンドを用いれば，データの分布をヒストグラムで表すことができます.

```
ds=xlsread('Jap-Math-Sci.xlsx');
histogram(ds(:,5));%Score of Jap.
hold on
histogram(ds(:,7));%Score of Math.
hold off
xlabel('Score')
ylabel('Number of Students')
legend('Mathematics','Japanese')
```

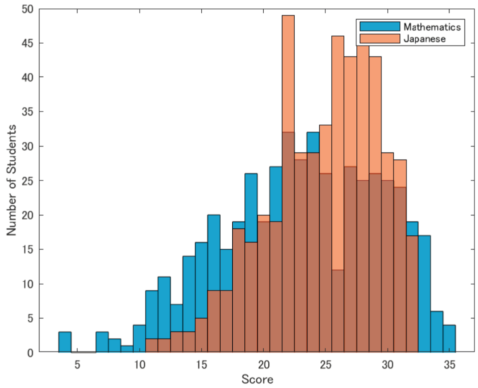

図 8.2: データ分布図.

- ds=xlsread(‘filename’)　では，Excel ファイル filename の数値データのみ，読み込みます．数値でないものも読みたいときには [ds, headertext] = xlsread(‘filename’) とします.
- ここではヒストグラムを描くコマンド histogram を 2 回呼んで，データ MathA と JapA の分布を重ねることにより，分布の違いなどが分かります.
- hold on を挟まないと次の histogram 命令で前の図が消えてしまいます.

8.1.2.2　散布図

サンプルデータから，第1パラメタをx軸とし，第2パラメタをy軸とし散布図を描くコマンド

scatter(x,y)

が用意されています．また，サンプルの点の属性（group）を，色で区別して表すために

gscatter(x,y,group)

があります（図8.3）．

```
ds=xlsread('Jap-Math-Sci.xlsx');
gscatter(ds(:,3),ds(:,5),ds(:,4),...
  'br','.',20,'off','Number','Score')
hold on
gscatter(ds(:,3),ds(:,7),ds(:,4),'br','x',10,'off')
hold off
legend('Location','northeastoutside')
legend('Japanese 1','Japanese 2',...
  'Mathematics 1','Mathematics 2')
```

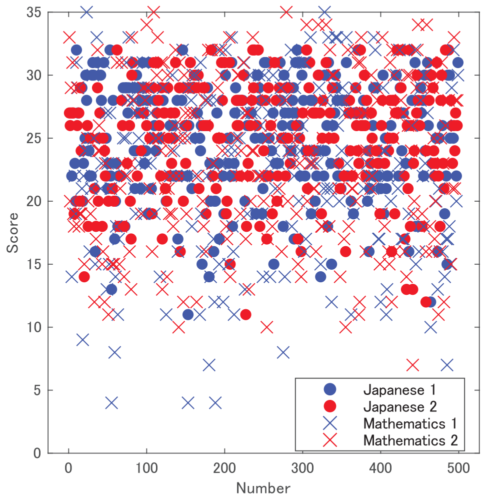

図 8.3: データ散布図.

ここでは男女の別を違う色で示したいので，gscatterを使いました．

- gscatter(x,y,group)はgroup内のデータに従ってグループ分けされた（x,y）データの散布図を描きます．ここではds.sexの中の第4列のデータ1，2（青、赤）に対応します．
- legendによってサンプルデータの説明が与えられます．
- 「...」は改行です．命令が横に長すぎるとき，これで改行・継続を示します．

```
ds=dataset('xlsfile', 'Jap-Math-Sci.xlsx');
mMathA=mean(ds.MathA)
sigMathA=std(ds.MathA)
mJapA=mean(ds.JapA)
sigJapA=std(ds.JapA)
cor=corrcoef(ds.MathA,ds.JapA)
```

```
>> Stat
mMathA =
  23.0100
sigMathA =
   6.4812
mJapA =
  24.8377
sigJapA =
   4.4945
cor =
   1.0000    0.6607
   0.6607    1.0000
```

図 8.4: 平均 mean，標準偏差 std および相関係数行列 corrcoef．左：スクリプト，右：結果

8.2　平均，分散，相関

与えられたデータの平均値，標準偏差（分散の平方根）および相関係数の計算は簡単です（図 8.4）．ここで xlsread の代わりに使った dataset コマンドは，'将来サポートされなくなる' とアナウンスが出ていますので注意してください．

8.3　回帰直線

相関係数を見ると，例えばここで扱っている例では，MathA と JapA の間には 0.66 の相関があることを示しています．この相関は小さいのでしょうか，あるいは大きいのでしょうか．一般には，この数字はかなり強い相関があると認識されるでしょう．そのようなときには，MathA と JapA の値をそれぞれ x 軸，y 軸にとってデータの分布を見るとより良く分かり，役立ちます（図 8.5）．

- scatter で，横軸に MathA, 縦軸に JapA の数値をとり，個々のデータの散布図を作る．
- lsline は回帰直線（最小二乗法による直線）を引くコマンド．

```
ds=dataset('xlsfile', 'Jap-Math-Sci.xlsx');
scatter(ds.MathA,ds.JapA,'r','o','filled')
h=lsline;
xlabel('Mathematics')
ylabel('Japanese')
set(h,'linewidth',2,'color','bl');
polyfit(ds.MathA,ds.JapA,1)
```

```
ans =
   0.4581   14.2959
```

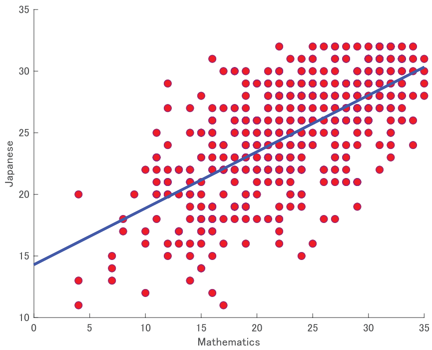

図 8.5: データの散布図と回帰直線.

- polyfit で，データを多項式で最小二乗フィットした式を求める．ここでは $n=1$ として直線の当てはめをし，$\mathrm{JapA} = 0.4581 * \mathrm{MathA} + 14.2959$ を得た．
- 散布図からも，数学の成績の良い生徒は国語の成績も良い傾向が見られる．このことを定量的に表すのが上の直線の方程式である．さらには，数学の成績が 0 であっても，国語の成績は 0 ではないだろうことが見てとれる．

第9章　微分方程式

9.1　常微分方程式の解法

9.1.1　常微分方程式の初期条件と解

微分方程式

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

を初期条件

$$y(0) = 0.5, \quad y' = 4.0$$

の下で解いて，その振る舞いを図に示しましょう（図 9.1）．

```
syms y(x);Dy=diff(y)
eqn=diff(y,x,2)+4*diff(y,x,1)+4*y
cond1=y(0)==0.5;cond2=Dy(0)==4.0
conds=[cond1 cond2]
ySol(x)=dsolve(eqn,conds)
x=0:0.05:5
plot(x,ySol(x))
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
title('Plot of D2(y)+4D(y)+4y,...
y(0)=0.5, D(y(0))=4.0')
```

```
ySol(x) =
exp(-2*x)/2 + 5*x*exp(-2*x)
```

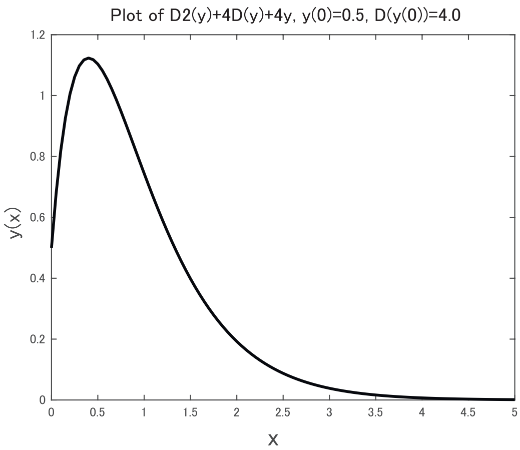

図 9.1: 常微分方程式.

- syms で y, Dy を定義（シンボリック変数）．
- eqn= $\cdots$ で微分方程式を定義.

- 恒等式 cond1, cond2 を定義し，その二つを合わせて conds= $\cdots$ で条件式として定義.
- dsolve(eqn,conds) は,「条件 conds の下で微分方程式 eqn= 0 を解け」，というコマンド．解として　$y\mathrm{Sol}(x) = \exp(-2*x)/2+5*x*\exp(-2*x)$ を返す（$y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}+5\mathrm{xe}^{-2\mathrm{x}}$ が初期条件を満足する解である）.
- x=0:0.05:5　は 0 から 5 まで 0.05 の刻み間隔で数ベクトル成分を定義.

9.1.2　常微分方程式の数値解法

同じ問題

$$y''+4y'+4y=0$$

を，4 次の Runge − Kutta 法を基礎にした ODE45 ソルバーを用いて，数値的に解きましょう．ODE は 1 階微分方程式の数値ソルバーです (図 9.2)．ODE では微分方程式を *m ファイルで定義し，それをメインのスクリプトで読み込みます.

```
[t,y] = ode45(@deq1,[0 5],[0.5, 4]);
plot(t,y(:,1),'-o',t,y(:,2),'-o')
xlabel('Time t');
ylabel('Solution y');
legend('y_1','y_2')
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
title('Plot of D2(y)+4D(y)+4y,y(0)=0.5,
D(y(0))=4.0')
```

```
function dydt = deq1(t,y)
%function of DiffEqSymbEx1p.m
dydt = [y(2); -4*y(2)-4*y(1)];
```

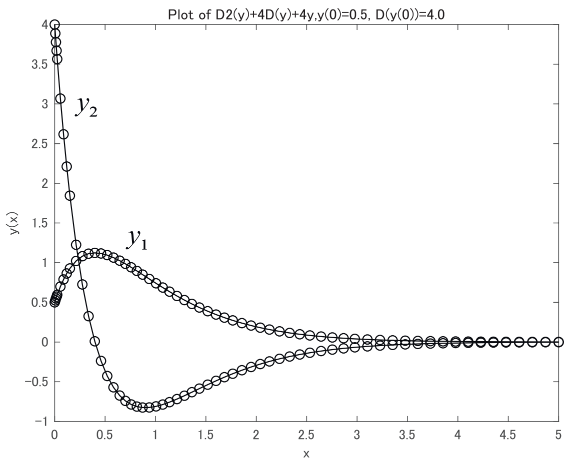

図 9.2: 常微分方程式の数値解法（ode45 の利用）．左上：メインスクリプト．左下：deq1.m ファイル.

まず，高階微分方程式を連立 1 階微分方程式に書き換えます：

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \ , \\
y_2' &= -4y_2 - 4y_1 \ .
\end{aligned}
$$

- ここでは微分方程式を定義するプログラムは deq1.m と名付けられている（図 9.2左下）．
- ベクトル成分 $y(:,1)$ が y，$y(:,2)$ が y' となる．
- 初期値は ODE45 のパラメータ $[0.5, 4]$ で与える．

9.2　非正規型の微分方程式

9.2.1　非正規型の微分方程式の特異解

微分方程式 $y' = f(x,y)$ において，$f(x,y)$ が x, y の ‘滑らかな 1 価関数’ でないとき，これを非正規型と呼びます．非正規型の場合，解の一意性条件が壊れて，一般解に含まれない解（特異解）が現れることがあります．

```
syms y(x);Dy=diff(y)
eqn=diff(y,x,1)-3*y^(2/3)
ySol(x)=dsolve(eqn)
```

```
ySol(x) =
  0
  (C4 + 3*x)^3/27
```

```
x=-3:0.05:3;
  for c=-1.5:0.2:1.5
    yc=(x-c).^3
    plot(x,yc)
    hold on
  end
y0=0*x;
plot(x,y0);
hold on
ylim([-20 20])
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
title('Plot of D2(y)+4D(y)+4y, y(0)=0.5,
D(y(0))=4.0')
```

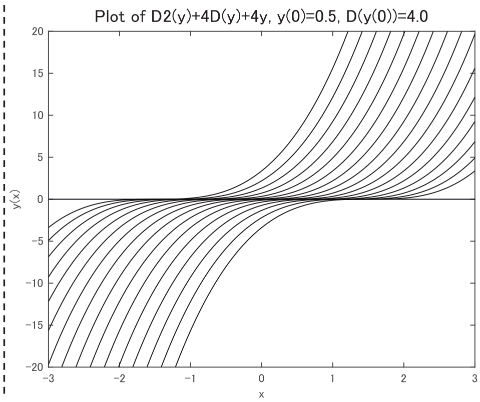

図 9.3: 非正規微分方程式．

微分方程式

$$y' = 3y^{2/3}$$

を解いてみましょう（図 9.3）． $y^{2/3}$ は y について多価です．

- 図右上が 2 種類の解 ySol(x) を返したところ．
- 左下は図を描く部分．一般解 $y(x) = (x-c)^3$ を $c = -1.5$ から 1.5 までの範囲で 0.2 刻みで変化させた．
- 図でも分かるように，一般解の**包絡線**がもう 1 つの解 $y = 0$．これを特異解という．

9.2.2　クレーローの方程式

非正規型微分方程式として有名なもの，クレーローの常微分方程式

$$y = y'x + \frac{1}{4}(y')^2$$

を解いてみましょう．図 9.4 で，右上が返ってきた解．解は 2 種類のもの

```
syms y(x);Dy=diff(y)
eqn=y(x)-Dy*x-Dy^2/4
ySol(x)=dsolve(eqn)
```

```
ySol(x) =
     -x^2
 C4^2/4 + x*C4
```

```
x=-1.5:0.05:1.5;
for c=-3:0.2:3
 yc=c.*x+c.^2/4;
 plot(x,yc);
 hold on
end
ylim manual
y0=-x.^2;
plot(x,y0);
hold on
ylim([-2 2])
xlabel('x')
ylabel('y')
```

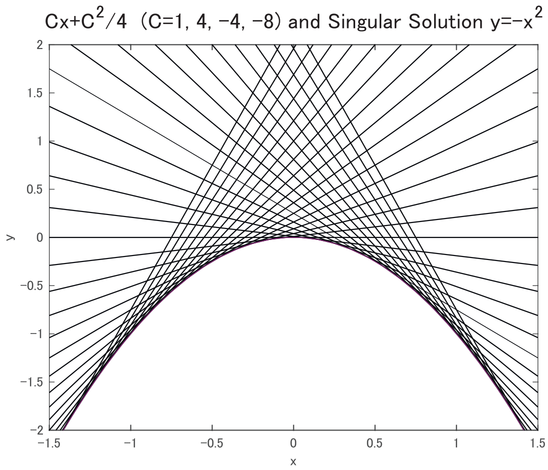

図 9.4: クレーローの方程式.

が与えられています．左下は図を描く部分．一般解 $y(x) = cx + (1/4)c^2$ を $c = -3$ から 3 までの範囲で 0.2 刻みで変化させた直線群が示されています．この直線群の包絡線が $y = -x^2$ であり，特異解です．

第10章　フーリエ級数展開

10.1　フーリエ級数

複雑な変化をする量は，単純な成分に分けて考えるのが鉄則です．信号解析その他で広く用いられるフーリエ級数展開を考えることにしましょう．

10.1.1　フーリエの方法

$[-a, a]$ を周期とする関数 $f(x)$ を 3 角関数の級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}))$$

と表すとき，これを「フーリエ級数展開」といい，展開係数 a_n, b_n は次の様に計算できます．

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \quad , \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

10.1.2　簡単な例題

次の関数を考えましょう．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \ -\pi < x \leq 0 \\ 1 & : \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

この関数は、x の奇関数ですから $\sin$ 成分だけが現れます：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi}\cos nx dx - \int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\Big] = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad . \end{aligned}$$

したがって上の関数のフーリエ級数展開は

$$f(x) \sim S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

となります.
ここで、右辺で $x=0$ とすると 0 となりますが，一方で $f(0)=-1$ ですから等号は成り立ちません：

$$S(0) = \frac{1}{2}\{f(0_+)+f(0_-)\} \neq f(0) \ .$$

このことがあるので $f(x)=S(x)=\cdots$ とは書かず，$f(x)\sim S(x)=\cdots$ と書きました.
一般にフーリエ級数 $S(x)$ は，$x=c$ が $f(x)$ の連続点であるなら正しく $f(c)$ を与え，また c が不連続なら左右から c に近づいた値の平均値

$$S(c) = \frac{1}{2}\{f(c+0)+f(c-0)\}$$

を与えることが知られています．これを**ディリクレ (Dirichlet) の定理**といいます.

10.1.3　MATLAB の適用

```
t=[-pi:0.01:pi];
x=zeros(1,numel(t));
for  n = 1:2:3
   x=x+ sin(n*t)/n*4/pi;
end
plot(t,x);grid on
hold on
for  n = 5:2:10
   x=x+ sin(n*t)/n*4/pi;
end
plot(t,x);grid on
hold on
for  n = 11:2:60
   x=x+ sin(n*t)/n*4/pi;
end
plot(t,x);grid on
  hold on
```

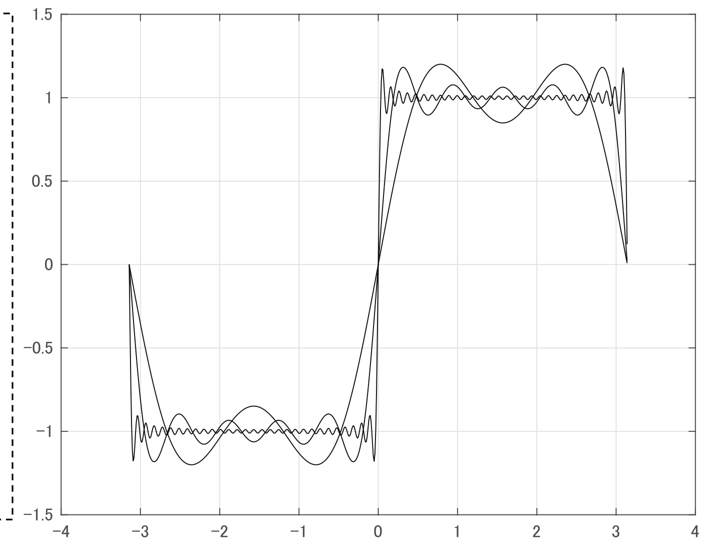

図 10.1: 部分和 $S_N(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ を N を変えて示す.

図 10.1に部分和

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

示します.

$x = 0$ および $\pm\pi$ 近傍での振る舞いに注意してください．これについては詳しい説明に踏み込みませんが.